РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018

БЛАНК № 11-21

Региональный этап ВсОШ 2018
по предмету «Математика»

Фамилия, имя, отчество полностью:
Медетдова Бармет Зиядиновна

Число, месяц, год рождения (ДД.ММ.ГГГГ):
07.04.2001.

Класс учащегося:
11

За какой класс учащийся пишет работу:
11

Полное название образовательной организации по уставу:
МБОУ "Лицей №39".

Название района или города:
г. Махачкала

Дата: 31.01.2018

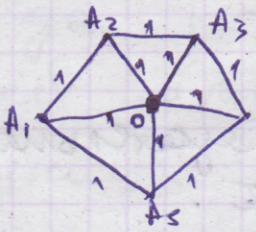
Подпись:

№ 11.1.

Решение:

Ответ: 9.

Допустим, что существует такая пятиугольник, у которого все 10 отрезков равны 1.



Т.к. каждый отрезок равен единице, то имеем 5 равносторонних Δ-ка. Именно $\triangle A_1A_2O$, $\triangle A_2A_3O$, $\triangle A_3A_4O$, $\triangle A_4A_5O$, $\triangle A_5OA_1$. (т.к. все стороны равны между собой)

Значит, $\angle A_1OA_5 = \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA_5 = 60°$. В сумме эти 5 углов дают $60° \cdot 5 = 300°$, но с другой стороны их сумма равна 360°.

Противоречие.

Пример для 9 отрезков:

$\angle \upsilon = 60°$; $A_1O = A_2O = \ldots = A_5O = A_1A_5 = A_2A_3 = A_4A_3 = A_4A_5 =$

$\angle A_1OA_2 = 360° - 4 \cdot 60° = 120° = d$.

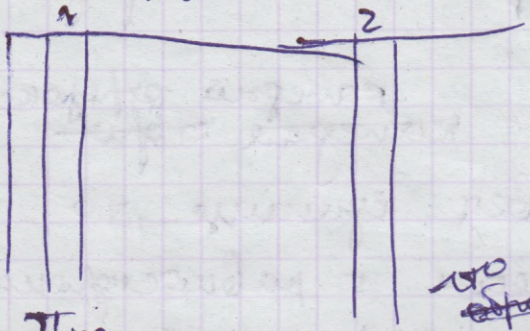
$\angle A_1OA_2 = 120$. $A_1O = OA_2 = 1$.

$A_1A_2 = \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ответ: 9.

11.2.

Решение: Ответ: обязательно.



Предположим, ~~что~~ необязательно ~~обратное~~, ~~найдутся такие 2 столбца~~. Тогда найдутся такие столбцы, у кот-х кол-во строк, в в пере-х к-х с этими столбцами стоят только нули, (кол-во таких строк k), ~~больше~~ меньше кол-ва строк, в пересечениях которых стоят только единицы (кол-во таких строк m) ($k \leq m$ по усл. предположению).

? Значит, строк, пересек-х эти столбцы в 1 ше 0 всего 1001 к-т.

В
столбц
2k -
2 столб
кол-в
2.m
тогда
нулей
единиц
2-x
2k +
k
k
рече
.
Для
1001 ×
1 и

В сумме нулей в этих 2-х столбцах $< 2k + 1001 - k - m$.

$2k$ – (k – кол-во строк, нер-х в нулях 2 столбца).

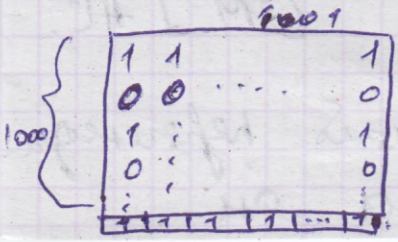
кол-во единиц равно $2m + 1001 - k - m$ (аналогично).

Тогда по условию кол-во нулей в новом столбце $>$ кол-ва единиц. Скр-во, и в этих 2-х столбцах

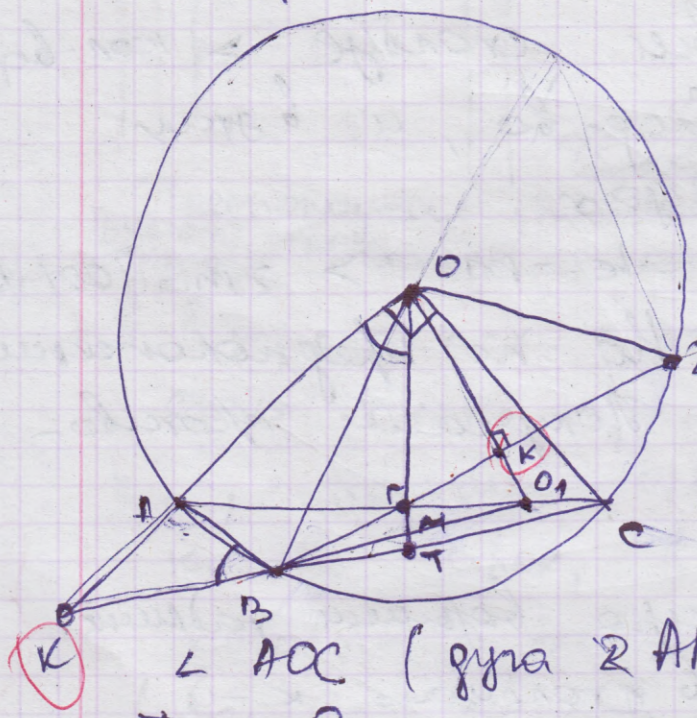
$2k + 1001 - k - m > 2m + 1001 - k - m$,

$k > m$. Но по предположению $k < m$. Получаем противоречие.

Для примера возьмем таблицу 1001×1000, в столбцах к-б 1 и 0 чередуются, а в 1001-й – в посл-й строке – заполнены единички. Очевидно, что выполняется ограничение.



№ 11.3.



Решение:

Т.к. ∠ABC = 135°, то ∠AOC = 270° (опирается на ту дугу, к-то опирается ∠ABC)

∠AOC (дуга ⌒ABC) = 90°.

Т.к. O - центр окр-ти ω.

M - середина AC, то OM ⊥ AC.

Проведем серединный перпендикуляр к BD, тогда он

проходит через O (O-ц. описанной окр. $\triangle CDB$) и ц. опис-й окр-ти $\triangle BOD$. Пусть он пересекает AC в точке O_1. Тогда

$BO_1 = DO_1$;

$\angle ABK = \angle AOM = \angle MOC = \angle OCM = \angle OAM = 45°$.

$\angle ABK = 180° - 135° = 45°$;

$ABOPT$ – вписанный.

В $\triangle OMO_1$ MK – высота, поэтому $MK = \sqrt{OK \cdot O_1K}$.

Степень точки K относительно окружности ω равна $OK^2 - OB^2 = -BK^2 = O_1K^2 - BO_1^2$.

Значит, O_1 – центр окр. $\triangle BOD$.

№11.4.

$1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$.

x^2+yx+y^2, y^2+yz+z^2, z^2+xz+x^2.

Рассм-м сумму полученных чисел.

$2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+xz = 2(x^2+y^2+z^2)+\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} =$

$= \frac{(x+y+z)^2+3(x^2+y^2+z^2)}{2}$

Начальная сумма чисел равна $2+\sqrt{2}$ – иррациональное число.

Т.к. сумма полученных чисел равна $\frac{(x+y+z)^2+3(x^2+y^2+z^2)}{2}$ не меняет своей рациональности, то получить три рациональных числа невозможно.

$x^2+yx+y^2 = \frac{x^3-y^3}{x+y}$.

Только сумма сопряженных иррац-х чисел, а также их произведение является числом рациональным.

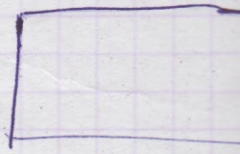
11.5

№11.4.

Если

В данн

в закр-



один р

таких

1 х 7

Всего

$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy$.

$y^2+yz+z^2 = (y+z)^2 - yz$.

$x^2+xz+z^2 = (x+z)^2 - xz$.

11.5

№11.4.

Если отрезок в Δ, то в прямоугольник и трапецию он не вл-ся ломаной. Если мы в данной фигурке построим в закр-е клетки, то ломаной в ней нет.

Таких фигур в сетке 33 и прямоуг. 1×3.

Достаточно построить один раз в закр-ь треугольных таких полос 33 и прям-к 1×100.

Всего построено $(3 \cdot 33 + 1) \cdot 33 + 50$.

2 тур

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018

БЛАНК № 11-21

Региональный этап ВсОШ 2018
по предмету «Математика»

Фамилия, имя, отчество полностью:
Меджидова Бармет Зиявдиновна

Число, месяц, год рождения (ДД.ММ.ГГГГ):
07.04.2001

Класс учащегося:
11

За какой класс учащийся пишет работу:
11

Полное название образовательной организации по уставу:
МБОУ "лицей №39"

Название района или города:
г. Махачкала

Дата: 01.02.2018 **Подпись:**

11.6.

Решение:

Так как $n : d$, то $n = kd$, где $k, d \in \mathbb{N}$.

$k, d \geq 1$.

Т.к. $1 \leq d, k \leq n$, то среди вписанных дробей

$\frac{n-k}{n-(n-k)}$ найдётся дробь $\frac{kd-k}{kd-(kd-k)} = \frac{k(d-1)}{k} = d-1$.

$n = kd$. Значит, среди вписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

11.7.

Решение:

$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right)$

при $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $f(x) + f(-y) =$

$= 2f\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right) =$

$= f(x) + f(y)$, то есть

$f(y) = f(-y)$ при $\forall y \in \mathbb{Z}$.

Значит, $f(x)$ - функция чётная.

№11.8.

Реше

Т.к. n

много

найдёт

Допуск

$n > 10^{20}$

простых

вдали

Тогда

где S -

n_1,

и $(S,$

$(S, n_1) = 1$

Рассм

просто

Тогда

прос

S_1 - с

чис

№ 11.8.

Решение:

Т.к. простых чисел бесконечно много (известный факт), то найдётся простое число $n_1 > 10^{2018}$.

Допустим, что не найдётся такого $n > 10^{2018}$, такого, что сумма всех простых чисел, меньших n_1, взаимно проста с n.

Тогда для n_1: $(S, n_1) = k$, где S - сумма простых, меньших n_1. Так как n_1 - простое, и $(S, n_1) > 1$ по предположению, то $(S, n_1) = n_1$.

Рассмотрим следующее за n_1 простое число $n_2 > 10^{2018}$.

Тогда $(n_2, S_1) = n_2$, т.к. n_2 - простое, и $(n_2, S_1) > 1$, где S_1 - сумма простых чисел, меньших n_2.

Значит, $S_1 = S + n_1$, т.к. n_2 след-е простое за n_1.

То есть $(S+n_1, n_2) = n_2$.

Значит, $(S+n_1) : n_1 \cdot n_2$,

т.к. $S : n_1$ и $n_1 : n_1$, то

$S + n_1 : n_1$ и, т.к. n_1 и n_2 – прос. тое, то $(S+n_1) : n_1 \cdot n_2$

$$\boxed{n_1^2 < n_1 \cdot n_2 \le S + n_1 < n_1(n_1-1) + n_1 = n_1^2}$$

$S = 2 + 3 + 5 + 7 + \ldots + T$

T – простое, предыдущее

$T < n_1$, между T и n_1 – нет простых,

$S = \underbrace{2+3+\ldots+T}_{< n_1 - 1} < P(n_1-1)\,T < (n_1-1)\,n_1$

$n_2 > n_1$.

$n_1^2 < n_1^2$ получаем противоречие

Значит, найдётся $n \ge 10^{2018}$, (2n) такое, что сумма n простых подряд не будет простым с n.

N 11.9

Решение:

Покажем, что может быть

Δ ...

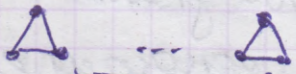
3 3

Любое ... может ... фигурой ... с 88 ... 88 · 2 (дели) ...

№ 11.9.

Решение:

Покажем, что для 33·3·2 = 198 пар знакомств может выполняться условие.



Вершина другого цвета со всеми вершинами выделенного треугольника.

При удалении вершины любого треугольника на её место может встать вершина 1, образуется треугольник. 33 треугольника и 1 другого с 99 вершинами, всего рёбер

99·2=198 (ребра соед-ся вершины (дети), если они дружат).

Дети кодируем вершинами, а ребра между ними ребрами.
Степень каждой вершины ≥ 3.
Допустим обратное.

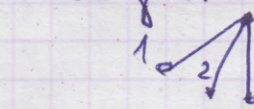
У верш. 1 два знак-х.
После выделения одного из них знак-х мы не сможем получить тройку с вершиной 1.

Расем-м.

33 трех

Как уже сказано, степень $\forall$ вершины ≥ 3
На рисунке мы разбили на тройки, 99 человек, но не провели оставшиеся необходимые для условия задачи ребра.
Т.к. степень $b_i \geq 3$, то для A_i $(i = 1, \dots, 99)$

Рассм. вершину A_i. ~~Сам она сорванка с~~ её степень ≥ 3.



Чтобы мы могли образовать ~~>11>10~~ треугольник вершины 1, 2, 3 ~~Решение~~: обязательно должны быть попарно соединены.

В Чтобы максимально снизить кол-во ребер, нужно получить макс-е число компонент связности. В каждой с одной стороны компоненте кол-во вершины с одной стороны сравнимо с 1 по модулю 3, т.к. мы можем выделить отсюда одну вершину и т.к. после этого разделить на тройки. С другой стороны делится на 3, т.к. мы можем не выделять, значит, это одна компонента связности.

Граф имеет вид