РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018

БЛАНК № 11-23

Региональный этап ВсОШ 2018
по предмету «Математика»

Фамилия, имя, отчество полностью:
Мусаева Асият Магомедовна.

Число, месяц, год рождения (ДД.ММ.ГГГГ):
16.02.2001.

Класс учащегося:
11

За какой класс учащийся пишет работу:
11

Полное название образовательной организации по уставу:
МБОУ лицей 39

Название района или города:
г. Махачкала

Дата: 31.01.18.

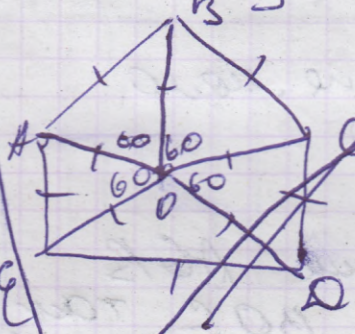
Подпись:

11.1 Обозначим точку за O.

Докажем, что 10 отр. быть не может.

Предположим, противное. У нас ровно 10 отрезков длины 1, тогда пятиугольник ~~правильный~~. ~~и точка является центром~~ точка O является центром. Опис. окруж. пятиугольника, т.к. до всех вершин одно расстояние. (Прав

У нас получилось, что все треугольники

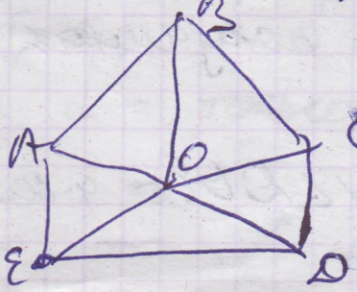


$\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle ODE$, $\triangle AOE$ — равносторон.

А значит, у них все углы по 6°

11.1. Назовем точку — т. O. А ~~пятиуг.~~ пятиугольник — ABCDE.

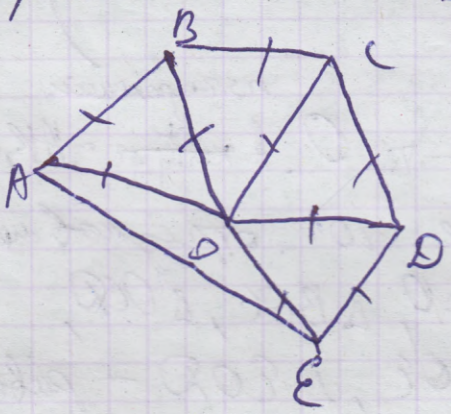
Предположим, что все 10 отрезков могут равняться 1. Тогда $\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle OCD$, $\triangle AOE$, $\triangle EOD$ — равносторонние.



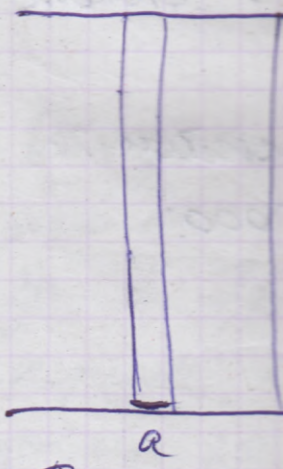
Значит, все углы у них по 60°.

Треугольников $5 \cdot S = 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$.
S – сумма всех углов при O.
Но вокруг т. O, должно быть 360°.
И сумма углов $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360^\circ$, т.к.
лучи ~~отрезки~~ OA, OB, OC, OD, OE разбивают угол на 5 ~~равных~~ частей.
$300^\circ \neq 360^\circ$.
Значит, 10 отрезков быть не могло.
9 отрезков

Построим равностор. $\triangle$-ки AOB
Приложим к нему еще BOC, так, что OB – была общая сторона.



Аналогично приложим к BOC – сокр. А DOE – к COD.
У нас получилось 9 равных отрезков.
$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 4 \cdot 60 = 240$

Значит, у
$\Rightarrow AE = \sqrt{3}$.
(по т. косин.)
$(4 \geq \sqrt{3}$
Ответ: 9.
2. Пред
Рассм
в которых


Пусть это
Посчитаем
a и b. Пр
строк, где
a d – то
$c \geq d$
r – это те

Значит, угол $AOE = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ ⇒

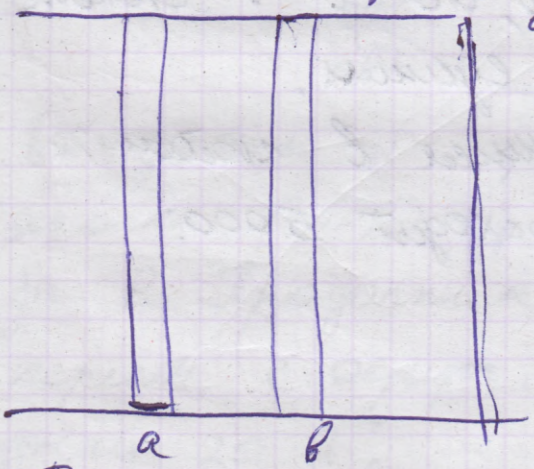
⇒ $AE = \sqrt{3}$. Пятиугольник выстроился.
(по т. косин.)

($4 \neq \sqrt{3}$).

Ответ: 9.

2. Предположим, что найдутся. инверсная задача

Рассмотрим 2 каких-то столбца, в которых ~~набор~~ число строк, в пересечениях которых с этими 2 мя столбцами. столб только нули, больше числа строк, где в перес. только единицы.



Пусть это столбцы a и b.

Посчитаем сумму всех чисел в a и b. При том, что c - кол-во строк, где в перес. только единицы, а d - только нули. По предполож.

$c \geq d$

r - это те строки, где либо 01, либо 10,

т.е остальные строки.

$c+d+r=1001$. – сумма всех строк.

Сумма всех чисел в a и b

$2c+r$. Т.к строки, где обе, 1" дают 2, а где равно 1 единица 1.

В условии сказано, что в b столбце чисел больше, чем единиц.

Значит, сумма чисел в любом столбце не превосходит 5000.

А, значит,

$2c+r \leq 1000$.

$c \geq d$

$1001 = c+d+r \leq 2c+r \leq 1000$.

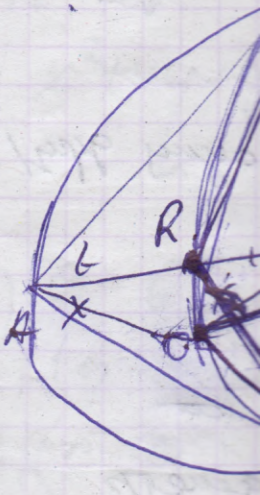
Получается,

$1001 \leq 2c+r \leq 1000$

?!

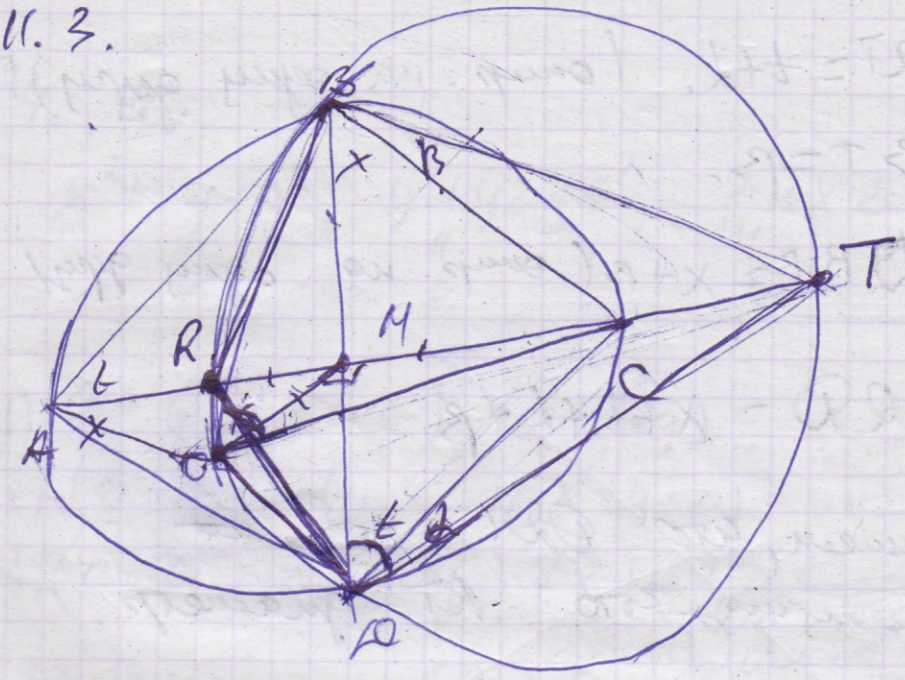
Не найдутся 2 таких столбца.

11.3.



Обозначим
около
за R. Пр
пересеч.
точку за
$\angle DAC$
$\angle DBC$
друг
$\angle AOC$
OM – ме
OM = TM
$\angle ROC$

11. 3.



Обозначим т. пересеч. окруж, опис. около BOD и AC (левее M), за R. Продолжим RC, за C, до пересеч. с окруж. Г. Обозначим эту точку за Г.

$\angle DAC = x$

$\angle DBC = \angle DAC = x$ (опис. углы опир. на одну дугу)

$\angle AOC = 2(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$

OM – медиана в прям. Δ-ке

$OM = MГ = AM$

$\angle RDC = \angle BAC = t$, (одн. дуга) $\angle TDC = \alpha$

$\angle BRT = t + \alpha$. (опир. на одну дугу) T.

$\angle CBT = \beta$.

$\angle DRT = x + \beta$ (опир. на одну дугу) T

$\angle BRD = x + t + \alpha + \beta$.

Докажем, что $\angle DRT = 90°$, и получим, что RT – диаметр.

Значит, центр лежит на диаметре.

4. Нет.

$x^2 + xy + y$

a

1) $(a - b) =$

2) $(b - c)$

3) $(c - a)$

$x_1 + y_1 +$

Если вс

рассмотр

будут р

Значит, м

либо

Среди

два $(x +$

$x - 2$,

(4) $(x - 2)$

$3x -$

4. Нет.

$$\underset{a}{x^2+xy+y^2};\quad \underset{b}{y^2+yz+z^2};\quad \underset{c}{z^2+xz+x^2}$$

1) $(a-b)=(x-z)(x+z+y)$

2) $(b-c)=(y-x)(x+y+z)$

3) $(c-a)=(z-y)(x+y+z)$

$x_1+y_1+z_1=\sqrt{2}+2.$

До этого не было момента, что все 3 рац

Если все числа ~~р~~ когда-то будут рациональны. То и их разности будут рациональны. ~~Р~~

Значит, либо $(x+z+y)$ - рац. и $(x-z)$ рац.

Либо ~~только один из~~ оба них. - иррац.

~~Среди 1), 2), 3) найдутся~~

~~два~~ $(x+z+y)$ - рац.

$x-z,\ y-x,\ z-y$ - рац.

(4) $(x-z)-(y-x)+(x+z+y)=$ рац

$3x$ - рац. Аналогично, $3y$, $3z$ - рац.

не все случаи

и x, y, z — иррац.

Но если они все рациональны, а мы предположили, что это первый раз, получаем противоч.

$x+y+z$ — иррац.

$x-y$, $y-x$, $z-x$ — иррац.

Из (*)

$3x$ — иррац. Аналогично, $3y$, $3z$ — иррац.

x, y, z — иррац.

Из 3 иррац $\to$ 3 рациональных?

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

Все числа, получаемые ~~в произв~~ и в ходе операций имеют вид.

$i+j\sqrt{2}$, где $i, j \in \mathbb{Z}$.

$2x+2y+2z-(y+z)-(y+x) =$

$= \cancel{2x+2y-x}$

2 тур

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018	БЛАНК № 11-23

Региональный этап ВсОШ 2018
по предмету «Математика»

Фамилия, имя, отчество полностью:

Мусаева Асият Магомедовна

Число, месяц, год рождения (ДД.ММ.ГГГГ):

16.02.2001.

Класс учащегося:

11

За какой класс учащийся пишет работу:

11

Полное название образовательной организации по уставу:

МБОУ лицей №39

Название района или города:

г. Махачкала

Дата: 1.02.

Подпись:

11.6

$$\frac{0}{n};\ \frac{1}{n-1};\ \dots;\ \frac{n-1}{n-(n-1)}$$

(1). Заметим, что для числа n - если $d=1$.
$1^{ая}$ дробь и есть $d-1=0$., $d=n-1$,
то это последняя дробь $\frac{n-1}{1}=n-1$.

(2) Пусть $n=dk$, где d, k - нат. числа, т.к
являются делит. n. А $d \neq n; 1$.

Докажем, что среди этих дробей
есть дробь, равна $d-1$.

Все дроби имеют вид

$$\frac{i}{n-i}, \text{ где } i \in N,\ i \in [0; n-1].$$

т.к $1 < k < n$ (случай рав-ва мы
разобрали в (1)). ~~Т.е лежит в том же промежутке что и i.~~
~~и $(n-k)$ - лежит в том же промежутке.~~
Значит, найдется такое i, равное $n-k$.
Рассмотрим эту дробь.

$$\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = \frac{\cancel{k}(d-1)}{\cancel{k}} = d-1. \quad k \neq 0.$$

ч.т.д.

рассмотрим делитель k.

*. Все делители n ~~(k)~~ лежат в промежутке от $[1; n]$, значит числа вида $n-k$, лежат в промежутке $[0; n-1]$.

И случай 1 и 2 можно было обобщить.

11.2. При всех действ. знач. рав-во выполняется, тогда подставим.

$x = a+b$

$y = a-b$.

1) $f(a+b)+f(a-b) = 2f(a)\cdot f(b)$.

Теперь в 1) подставим.

$a=0$

~~b=~~

(2) $f(b)+f(-b) = 2f(0)\cdot f(b)$.

$f(-b) = f(b)(2f(0)-1)$.

Достаточно показать, что $f(0)=1$, чтоб док-ть, что функция $f(x)$ - четна.

Условие четности:

$f(x) = +f(-x)$.

Теперь в р

подставим

получим

$2f(x) =$

Тогда ес

$\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(0)=1. \end{array}\right.$

Рассмотри

$f(x) =$ со

всегда при

условие ч

Ответ: в

11.3.1) Док

Сначи

чисел беск

Допустим, ч

простое ч

$q = \prod_{i=1}^{d} p_i$

каждым пр

и с $\forall$ сос

очередь ~~: ка~~

Мы наш

Теперь в рав-во, данное в условии подставим $y = x$. Получим

$$2f(x) = 2f(x) \cdot f(0).$$

Тогда если $f(x) \neq 0$; $f(0) = 1$, что мы и хотели получить в (2).

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(0) = 1. \end{array}\right.$$

Рассмотрим $f(x) = 0$,

$f(x) = const$ – четная функция., т.к всегда принимает одно значение, поэтому условие четности соблюдается.

Ответ: верно.

II. 3. 1) Допустим, что не найдется. Сначала докажем, что простых чисел бесконечно много.

Допустим, что это не так. И P_d – последнее простое число, тогда число

$$Q = \prod_{i=1}^{d} P_i + 1$$ – взаимнопросто с каждым простым числом., а значит и с ∀ составным числом т.к те в свою очередь ~~на~~ являются произв. прост. Мы нашли нат.число Q, которое делится

только на себя и на 1. Критерий. – простого числа. ($q \neq 1$, т.к $p_1 = 2$ $q > p_1$).
Перенумеруем все прост. числа начиная с 2 $p_1 = 2, p_2 = 3$.

2) Мы доказали, что простых чисел бесконечно. ~~Теперь докажем, что~~

Рассмотрим какое-то простое число p_{k+1}, такое что $p_{k+1} > 10^{2018}$.

А $(k+1)$ – четное. $n = p_{k+1}$.

И рассмотрим сумму

$S = \sum_{i=1}^{k} p_i$. – сумма всех простых, меньших n

($p_1 = 2$; $p_2 = 3$ ...)

$(k+1)$ – четно, значит k – нечетно.

И S – четно. Т.к. все числа, кроме $2^{ки}$ – нечетны S имеет такую же четность, что и $(k-1)$.

p_{k+1} – нечетно, т.к. ед. простое (четное) число это 2, а $2 < 10^{2018}$.

Значит, p_{k+1}

Тогда, что

взаимно

$S = p_1 + \ldots +$

Теперь рас

p_{k+2}.

$S_1 = S + p_k$

$p_{k+2} \nmid p$

$\Rightarrow p_{k+2} \nmid S$

Значит, что

$S_1 : p_{k+2}$

$r+1 : p_k$

$S_1 = (r+1$

$S(p_{k+2})$

$r+1 = r_1$.

Если $r_1 =$

Значит, $p_{k+1} \nmid S$. ? ($S \neq 1$, $S \neq p_{k+1}$) т.к. четко.

Тогда, чтоб S и p_{k+1} – были не взаимнопросты. S должен $\vdots p_{k+1}$.

$S = p_1 + \ldots + p_k = r \cdot p_{k+1}$. (причем $r > 1$, $r \in N$.) ?

Теперь рассмотрим. след. простое число.

~~p_{k+2}. $p_{k+2} \nmid p_{k+1}$ S, т.к $p_{k+2} \nmid p_{k+1}$, а $S \vdots p_{k+1}$.~~

$S_1 = S + p_{k+1} = (r+1) p_{k+1}$.

$p_{k+2} \nmid p_{k+1}$, а $S_1 \vdots p_{k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_{k+2} \nmid S_1$

Значит, чтоб $(p_{k+2} ; S) \neq 1$, надо, чтоб

$S_1 \vdots p_{k+2}$ $(p_{k+1}, p_{k+2}) = 1 \Rightarrow$

$r+1 \vdots p_{k+2}$.

$r \cdot p_{k+2} (p_{k+1})$.

$S_1 = (r+1) p_{k+1} = $ ~~$r \cdot p_{k+2} \cdot p_{k+1}$~~

$S(p_{k+2})$

$r+1 = r_1 \cdot p_{k+2}$. $S_2 = S_1 + p_{k+2}$.

Если $r_1 = 1$, то $p_{k+3} \nmid S_2$ и $S_2 \nmid p_{k+3}$.

Пусть $r_1 \neq 1$.

~~Рассмотрим p_{k+3}~~

~~Докажем, что $r_1 > r+1$.~~

~~$r+1 = r_1 \cdot (p_{k+2})$.~~

Рассмотрим p_{k+3} – след. прост. число.

$p_{k+3} \not\vdots\, S_2$, т.к. $S_2 \vdots\, p_{k+2}$, а $p_{k+3} \not\vdots\, p_{k+2}$.

Значит, чтоб $(S_2, p_{k+3}) \neq 1$

$S_2 \vdots\, p_{k+3}$.

$(p_{k+3}, p_{k+2}) = 1$; $(p_{k+3}, p_{k+1}) = 1$.

Значит, $(r_1 \cdot p_{k+1} + 1) \vdots\, p_{k+3}$.

$S_2 = p_{k+2}(p_{k+1} \cdot r_1 + 1)$.

$S_2 = p_{k+2}(r_2 \cdot p_{k+3})$. $S_3 = S_2 + p_{k+3}$.

Если $r_2 = 1$, то $(p_{k+4} \vdots\, S_3) = 1$, т.к. $S_3 \vdots\, p_{k+3}$, а $p_{k+4} \not\vdots\, p_{k+3}$

$S_3 = p_{k+2} \cdot p_{k+3}$.

$S_3 \not\vdots\, p_{k+4}$

( ) Теперь докажем, что

$r_2 < r_1$

$p_{k+3} - p_{k-}$

т.к.

$p_t - p_{t-}$

$p_{k+2}(p_k$

$p_{k+1} \cdot r_1$

$p_{k+3} \geq 4$

$p_{k+1} \cdot r$

$\frac{p_{k+1} \cdot r}{p_{k+1}}$

$r_2 \leq \frac{p_{k+}}{p_{k-}}$

Т.е. r_2

Аналог чи

рассмотр

$S_t = p_{k+}$

$p_{k+3} - p_{k+1} \geq 4.$

$p_t - p_{t-1} \geq 2.$

$p_{k+2}(p_{k+1} \cdot r_1 + 1) = p_{k+2} \cdot (r_2 \cdot p_{k+3}).$

$p_{k+1} \cdot r_1 + 1 = r_2 \cdot p_{k+3}.$

$p_{k+3} \geq 4 + p_{k+1}.$

$p_{k+1} \cdot r_1 + 1 \geq r_2 (p_{k+1} + 4)$

$\frac{p_{k+1} \cdot r_1 + 1}{p_{k+1} + 4} \geq r_2$

$r_2 \leq \frac{p_{k+1} \cdot r_1 + 1}{p_{k+1} + 4} < \frac{p_{k+1} \cdot r_1 + 4r_1}{p_{k+1} + 4} \leq r_1$

Т.е. $r_2 < r_1$. ∎

Аналогичным образом будем рассматривать след. простые числа.

$S_t = p_{k+t} \cdot (r_{t-1} \cdot p_{k+t-1} + 1).$

$p_{k+t+1} \not\vdots\, S_t$, т.к. $S_t \vdots\, k+t$.

Значит, S_t должно делиться на

p_{k+t+1}.

$$S_t = p_{k+t}(r_t \cdot p_{k+t+1}).$$

Мы показали, что $r_2 < r_1$, аналогичным образом показывается, что $r_3 < r_2$. и ... $r_i < r_{i-1}$.

Т.к. r_i – нат. числа, то все время уменьшаясь r_i – когда-нибудь будет равняться 1. (Пересчитать ее не может, т.к 1 – min нат. число).

Пусть мы дошли до $r_j = 1$.

$$S_i = p_{k+i} \cdot \overset{=1}{r_i} \cdot p_{k+i+1}$$

? Тогда $p_{k+i+2} \vdots\, S_i$, т.к.

$S_i \vdots\, p_{k+i}$

и $S_i \not\vdots\, p_{k+i+2}$, т.к ~~$(p_{k+i}; 1) = p_{k+i+2}$~~

и что тогда?

~~и p_{k+i+1}~~

$(p_{k+i}; p$

Значит, предр

и ~~мы дой~~

сумма всех

проста с

11.9 В соот

а дружб

~~11.9~~. Док

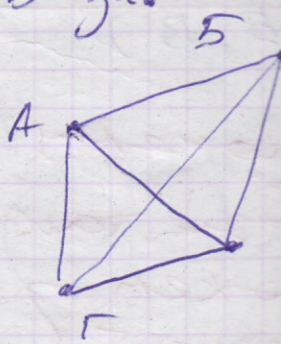
и $n \equiv 1 /$

группы

ребенка м

$2n-2$ – ре

База. n



и ~~p_{k+i+1}~~;

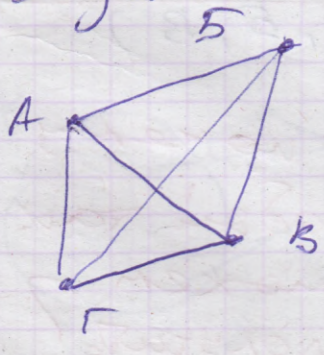
$(p_{k+i}; p_{k+i+2}) = 1$ и $(p_{k+i+1}; p_{k+i+2}) = 1$.

Значит, предположение не было верным и ~~мы дойдем~~ число $n > 10^{2013}$, что среди всех простых, меньших n, взаимно-просто с n – найдется.

11.9 В соответствие детям ставим вершины, а дружбам – ребро, 2 ~~раз~~ дружащих ребенка содерж. ребром.

~~11.9~~. Докажем, что если детишек n, и $n \equiv 1 \pmod 3$., то разбить на $\frac{n-1}{3}$ группы по 3 попарно дружащих ребенка можно, используя не менее $2n-2$ ребер.

База. $n = 4$. Тут есть 4 ребенка, А, Б, В, Г.



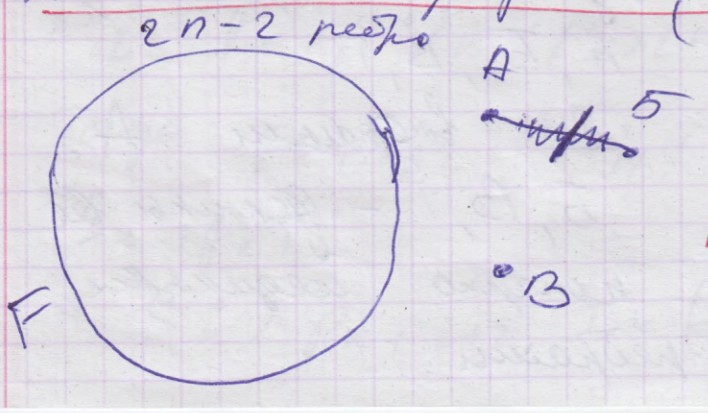
Мы выкидываем А. Б, В, Г – должны попарно соединяться ребрами.

~~Теперь~~ Аналогично выделим Б ~~В~~
Тогда, должен присутствовать Δ-ник.
АВГ.
Выделим вершину В. - должен
быть Δ-ник АБГ.

Мы получили, что наш граф полный.
Вершин 4. Ребер $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$.
~~И это ми~~
По предположению должно быть.
$2(4) - 2 = 6$. Все верно.

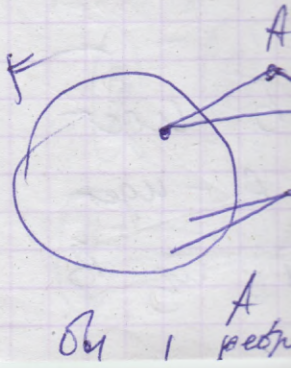
Переход:

Пусть есть граф с n вершинами (~~F~~).
и там ровно 2n - 2 ребер. (min).
Добавим в граф еще 3 вершины.
(А, Б, В)



почему любой так можем получить?

Докажем, что
бы на 6.
а) Если р
то из к
идти хот
(Если
то наша
образовать
Итого: 2·3
б) Если ес
Пусть оно
То из
мин. 2
И и из
ребра в

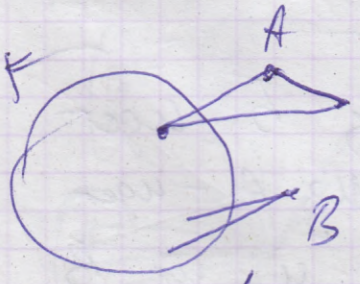


бы 1 ребр

Докажем, что кол-во ребер увеличится хотя бы на 6.

а) Если ребер между А, Б, В нет, то из каждой вершины должно идти хотя бы 2 ребра.
(Если выберем не какую вершину), то наша вершина должна с кем-то образовать А-кик.)
Итого: 2·3 = 6. + 6 пар. подграфа

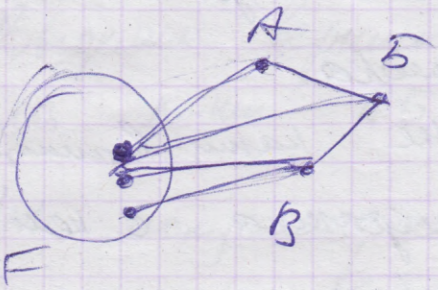
б) Если есть ровно одно ребро. в ~~А-кик~~ АБВ
Пусть оно между А и Б.
То из В - должно идти, как мин. 2 ребра. в граф F.
И из А и Б - должны идти хотя бы ребра в какую-то вершину.



Если мы выделим Б, то из А должно выходить еще хотя бы 1 ребро, аналогично, если выделим Б должно идти еще хотя бы 1 ребро — чтобы образовался А-кик.

Итого: как. мин. 6 ребер.

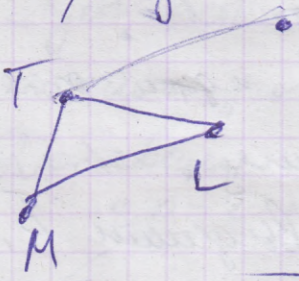
в) Если ~~по~~ между какими-то 2-мя парами есть ребро, а какой-то 3-нет.



(Пусть нет ребра AB, все симметрично, можем позволить себе такое допущение).

Тогда, чтоб образовался Δ-ник.

(*) У каждой вершины степень (кол-во ребер, выход. из нее) должна быть не меньше 3. Хотя бы 2, чтоб образовался Δ-ник и ~~хот.~~ 1 одно ребро если. Одну из соседних по ребру вершин мы выделили.



У всех $\deg \geq 3$. => из Б идет хотя бы 1 ребро в F. Из A - идет хотя бы 2 ребра в F и из B идет хотя бы 2 ребра в F

Т.е как

г) И посл.

между

Итого

Мы док

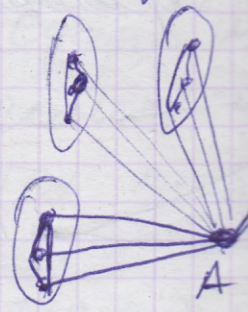
ним 3

графе

6. Значит

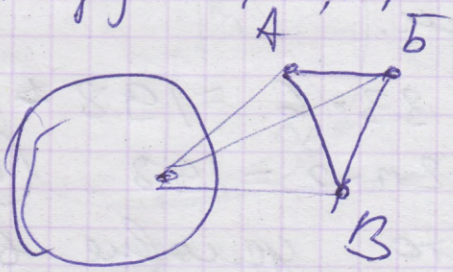
вершин.

Приведем



Т.е как мин. +6 ребер

г) И посл. случай когда все ребра между А, Б, В, проведены

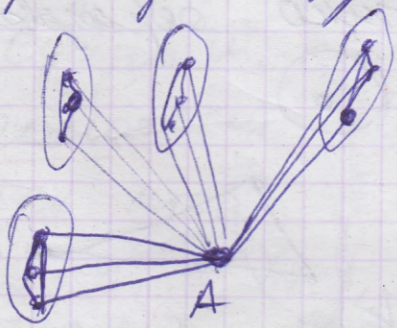


Еще из каждого должно выходить, как мин. 1 ребро из (*).

Итого как мин. +6 ребер.

Мы доказали, что при прибавлении 3 вершин кол-во ребер в графе увеличивается хотя бы на 6. Значит оценка $2n-2$ — ~~была~~ верная. $n=100$. $\left(4+6\left(\frac{n-4}{3}\right)\right)$.

Приведем пример.



Выделим одного человека А (вершину А). И остальных разобьем на 33 группы. между

каждыми 3 в группе проведем все 3 ребра. А потом все вершины соединим с А.

~~Тем~~ Ребер там.

$33 \cdot 3 + 99 = 33 \cdot 6 = 198$

Для $n = 100$ $2n - 2 = 198$

Теперь покажем что условие в таком графе выполняется.

Выделяем А. — все остал. вершины. входят в какую-то группу.

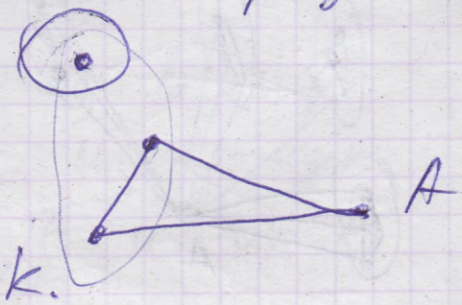
~~Ура~~. Значит, разбиение возможно.

Выделяем какую-то вершину из группы k, Все другие ~~группы~~ вершины, кроме А. и так разбиты на группы.

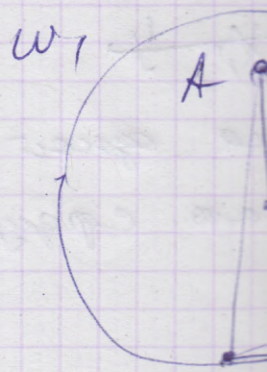
А — соединено еще с 2-мя другими из группы k. — можно образовать Δ-ник.

Пример подходит.

Ответ: 198.



11.10.



Чтоб

одной ~~окр~~

лежать

AX_1

BY_2

$(AX_1, BY_1$

$XY_2 \parallel$

в одной

Сфера

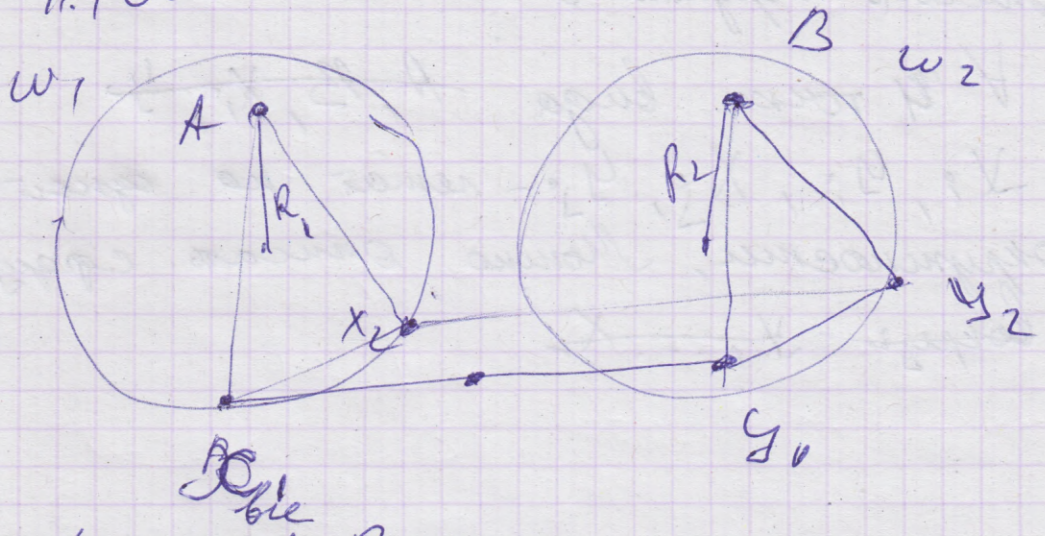
гомотет

так чтоб

$X_2Y_2 =$

трапеция

11.10.



Чтоб ~~AB~~, Y, X лежали на одной ~~окружности~~ сфере, они должны лежать на одной окружности.

$AX_1 \parallel BY_1$,
$BY_2 \parallel AX_2$ $\Rightarrow (AX_1, X_2) \parallel (BY_1, Y_2)$.

(AX_1, BY_1) – одна плоскость, $(BY_2\ AX_2)$ – одна плоскость!

$X_1X_2 \parallel Y_1Y_2$ $\rightarrow X_1, X_2, Y_2, Y_1$ – в одной плоскости.

Сфера ω_2 – получается при поворотно-гомотетии ω_1, и парал. перенос, так чтоб A – совпало с B. $\boxed{k_0 = \frac{R_2}{R_1}}$

$X_2Y_2 = X_1Y_1$ X_1, X_2, Y_2, Y_1 – равнобок. трапеция. Вокруг X_1X_2, Y_2Y_1 – можно

описать окружность

$\forall$ 4 точки вида ~~A, B, X_i, Y_i~~

X_i, Y_i, X_j, Y_j - лежат на одной окружности. Можно описать сферу.

~~вокруг~~ ~~$X_1 \dots X_n$~~