11 класс

Задача №11-Т1. Вращающаяся гильза

Скорость точек на внешней поверхности гильзы направлена к оси гильзы под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega R}{v}$. Сила трения, действующая на элементы поверхности гильзы, направлена противоположно их скорости, а значит, не изменяет угол между векторами скоростей точек гильзы и её осью, а влияет лишь на модули этих скоростей. Следовательно, в процессе торможения гильзы отношение скорости ее поступательного движения и линейной скорости вращательного движения точек ее поверхности остается неизменной: $\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}$.

Так как это обстоятельство очень важно для решения, приведем другой возможный способ его обоснования. Сила трения скольжения, в силу информации о постоянстве сил нормальной реакции стенок отверстия, для каждого малого элемента поверхности гильзы имеет постоянную величину и направлена против его скорости. Действие сил трения можно разделить на торможение поступательного движения (результирующая сила $F_x(x) = F(x)\cos\alpha$) и торможение вращения гильзы (тормозящий момент равен моменту силы $F_\perp(x) = F(x)\sin\alpha$). Поэтому ускорения, с которыми уменьшаются скорость ее поступательного движения $v_x = v\cos\alpha$ и линейная скорость вращательного движения точек ее поверхности $v_\perp = \omega R = v\sin\alpha$, пропорциональны этим скоростям. Следовательно, отношение величин этих скоростей остается неизменным:

$$\frac{(v_\perp)'_t}{(v_x)'_t} = \frac{v_\perp}{v_x}, \quad \left(\frac{v_\perp}{v_x}\right)'_t = \frac{v_x (v_\perp)'_t - v_\perp (v_x)'_t}{v_x^2} = 0, \quad \frac{v_\perp}{v_x} = const$$

Поэтому и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_\perp}{v_x} = const$.

В направлении поступательного движения ускорение гильзы определяется проекцией силы трения

$$F_x(x) = F(x)\cos\alpha = F(x)\frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}.$$

Поэтому движения вращающейся гильзы в направлении оси аналогично движению невращающейся гильзы при действии «уменьшенной» силы $F_x(x)$. Минимальное значение скорости $v_{\min}$ при учете этого можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{m v_{\min}^2}{2} = -A_{mp} = \frac{F_x(l)2l}{2} = \frac{F_0 l v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}}.$$

Из этого уравнения находим

$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + 4\left(\frac{F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что угловая скорость и скорость поступательного движения гильзы всё время связаны соотношением $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$. В момент полного погружения скорость поступательного движения v_1 в $\sqrt{2}$ раз меньше начальной скорости $v_0 = v_{\min}$, так как работа сил трения к этому моменту составляет ровно половину от величины работы до момента вылета. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{v_1}{v_0}\omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При движении гильзы внутри отверстия до момента полного проникновения ее внутрь плиты сила F_x линейно увеличивается. Ускорение гильзы

$$a = -\frac{F_0 \cos\alpha}{ml} x.$$

Это формула совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos\alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Координата переднего среза гильзы зависит от времени как

$$x = x_0 \sin \Omega t,$$

где x_0 определяется при этом из условия $x_0 = \dfrac{v_0}{\Omega} = v_0\sqrt{\dfrac{ml}{F_0 \cos\alpha}}$. Тогда до момента полного погружения гильзы в отверстие

$$x = v_0\sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos\alpha}} \sin \Omega t,$$

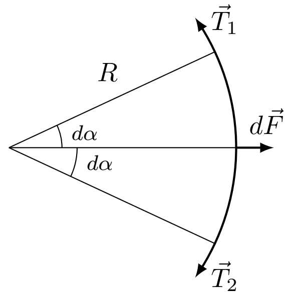
и время погружения τ находится из уравнения

$$l = v_0\sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos\alpha}} \sin \Omega t,$$

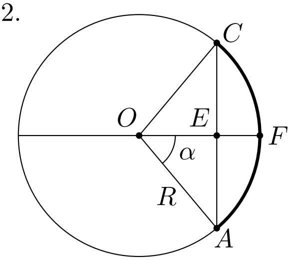
$$\tau = \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos\alpha}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{F_0 l \cos\alpha}{m v_0^2}}\right)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{F_0 l}{m v_0 \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}\right).$$

Задача №11-Т2. Как измерить поверхностное натяжение?



Так как нить невесома и сила поверхностного натяжения везде перпендикулярна нити, сила натяжения нити постоянна $T = const$. Если взять участок нити длины dl и пренебречь действием силы тяжести, то на него действуют только силы натяжения нити ($T_1 = T_2 = T$) и сила поверхностного натяжения dF. Приблизим участок нити дугой окружности некоторого радиуса R. Тогда сила поверхностного натяжения $dF = 2\sigma dl = 4\sigma R d\alpha$ (с учетом того, что у пленки две поверхности). В радиальной проекции имеем условие равновесия: $2T\sin(d\alpha) = dF$. Отсюда $R = T/2\sigma$, и таким образом $R = const$, то есть вся нить имеет форму дуги окружности. Поскольку AB и CD равны, минимальное расстояние между нитями достигается на середине высоты.

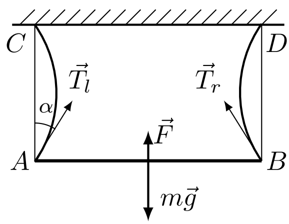


Из рисунка для расстояний: $AC = h$, $EF = (L-d)/2$. По теореме Пифагора для треугольника $\triangle OEA$:

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{L-d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R = \frac{(L-d)^2 + h^2}{4(L-d)}.$$



Рассмотрим часть системы, находящуюся ниже средней линии. Условие равновесия для нее: $2T + 2\sigma d = mg$ или $4\sigma R + 2\sigma d = mg$. (Либо можно рассмотреть силы, действующие непосредственно на планку: $2T\cos\alpha + 2\sigma L = mg$. Также в этом случае понадобится найти, под каким углом нить подходит к планке: $\sin\alpha = h/2R$). Подставляя из найденного ранее радиус нити:

$$\sigma = \frac{mg(L-d)}{h^2 + L^2 - d^2}$$

Подставляя числовые значения величин, находим: $\sigma = 0.066$ Н/м.

Задача №11-Т3. Трапеция лорда Кельвина

Теплоёмкость C газа равна:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = \nu C_V + \frac{pdV}{dT}$$

Поймём, для каких линейных процессов $p(V)$, кроме $p = const$ и $V = const$, теплоёмкости являются постоянными. Пусть $p = p_0 + \alpha V$. Тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$(p_0 + \alpha V)V = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0 + 2\alpha V}{\nu R}$$

Подставляя выражение для dT/dV в выражение для теплоёмкости, получим:

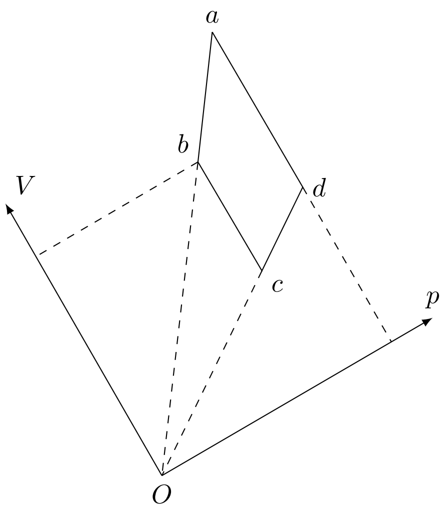
$$C = \nu\left(C_V + R\cdot\frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V}\right)$$

Теплоёмкость не зависит от объёма, если $p_0 = 0$, что соответствует прямой, проходящей через начало координат. Поскольку $C_p = C_V + R$, имеем:

$$C_V < C = \frac{C_p + C_V}{2} < C_p$$

Поскольку $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$ — процессы bc и da являются изобарными, а процессы ab и cd соответствуют прямым линиям, проходящим через начало координат.

Проведя линии ab и cd до пересечения, найдём положение начала координат. Далее, проводя через начало координат лучи, параллельные и перпендикулярные направлению изобар, получим направления осей объёма V и давления p соответственно.



Поскольку $p_a = p_d$ и $p_b = p_c$, из подобия треугольников следует, что $V_b/V_c = V_a/V_d$. Тогда имеем:

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{T_a}{T_d} \Rightarrow T_b T_d = T_a T_c$$

Поскольку $T_b > T_c$ и $T_a > T_d$ - температуры в точках b и d одинаковы и равны T_2, а температура в точке a максимальна и равна T_1. Тогда температура в точке c равна $T_3 = T_2^2/T_1$. Таким образом:

$$T_a = 400\text{ K} \qquad T_b = T_d = 200\text{ K} \qquad T_c = 100\text{ K}$$

Газ получает тепло на участках cd и da, а отдаёт — на участках ab и bc. Тогда имеем:

$$Q_+ = C(T_2 - T_3) + C_p(T_1 - T_2) \qquad Q_- = C(T_1 - T_2) + C_p(T_2 - T_3)$$

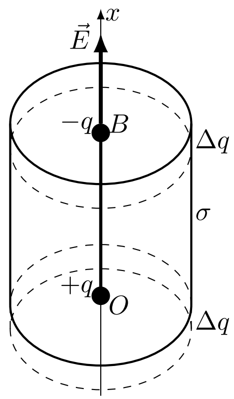
Поскольку $C_p = 7\nu R/2$ и $C = 3\nu R$, находим:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6(T_1 - T_2) + 7(T_2 - T_2^2/T_1)}{6(T_2 - T_2^2/T_1) + 7(T_1 - T_2)}$$

После упрощения:

$$\eta = 1 - \frac{6T_1 + 7T_2}{6T_2 + 7T_1} = 0{,}05$$

Задача №11-Т4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда



Цилиндр можно разделить на тонкие параллельные основанию кольца, напряженность каждого из которых будет направлена в точке O вниз, а в точке B вверх вдоль оси цилиндра — в силу осевой симметрии в распределении заряда. Соответственно сила, действующая на отрицательный заряд в точке B, направлена так же, как и сила, действующая на положительный заряд в точке O — вниз вдоль оси цилиндра, или против оси x на рисунке. Точно также — противоположно оси x — направлена и суммарная сила, действующая на диполь.

Пусть E_1 — величина напряженности поля цилиндра в точке O, а E_2 – величина напряженности в точке B. Тогда величина силы, действующей на диполь, $F = q(E_1 + E_2)$. Наложим на наш цилиндр еще один такой же, с поверхностной плотностью заряда симметричной исходному цилиндру: $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$. В результате сложения получится цилиндр, равномерно заряженный по поверхности с плотностью заряда σ_0:

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2H}\right) + \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi(H - x)}{2H}\right) = \sigma_0.$$

При этом по принципу суперпозиции в центре каждого из оснований будет одинаковая по величине напряженность, равная нужной нам для вычисления силы величине $E = E_1 + E_2$.

Поле в центре основания однородно заряженного цилиндра определим через скорость изменения потенциала по формуле: $E_x = -\Delta\varphi/\Delta x$. Заметим, что, если сдвинуть точку В вверх на Δx, то это равносильно смещению цилиндра, то есть исчезновению вверху кольца с зарядом Δq (обозначено на рисунке пунктирной линией) и прибавлению такого же кольца внизу. Разность потенциалов двух выделенных колец равна $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \dfrac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, причем $\Delta q = \sigma_0 \cdot 2\pi R \cdot \Delta x$. Таким образом,

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right),$$

и величина силы

$$F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Участники, знакомые с интегрированием, могут вычислить $E_1 + E_2$ непосредственно из принципа суперпозиции, складывая напряженности отдельных колец $dE_x = \dfrac{dq \cdot x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$:

$$E_1 + E_2 = \int\limits_0^H \frac{\sigma_0 \cdot 2\pi R x}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}\left(-\int\limits_0^H d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right)$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Задача №11-Т5. Движение в скрещенных полях

Поскольку мощность силы Лоренца всегда равна нулю - кинетическая энергия частицы равна работе силы, действующей на неё со стороны электрического поля. Отсюда:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$$

Вдоль оси x на частицу действует только сила Лоренца. Из второго закона Ньютона:

$$ma_x = qv_yB(y)$$

$$\Delta v_x(y) = \frac{qv_yB(y)\Delta t}{m} = \frac{\alpha q\sqrt{y}\Delta y}{m} = \frac{2\alpha q\Delta(y^{3/2})}{3m} \Rightarrow v_x(y) = \frac{2\alpha qy^{3/2}}{3m}$$

Из условия $v = v_x$ в момент, когда скорость частицы направлена вдоль оси x, найдём соответствующую данному моменту координату частицы y_1:

$$\sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \frac{2\alpha qy_1^{3/2}}{3m} \Rightarrow y_1 = \frac{3m}{2\alpha q}\sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha}\sqrt{\frac{2qE}{m}}}$$

Найдём радиус кривизны траектории в точке с координатой y. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную направлению скорости частицы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB + qE_n$$

где E_n - перпендикулярная скорости компонента электрического поля. Для неё имеем:

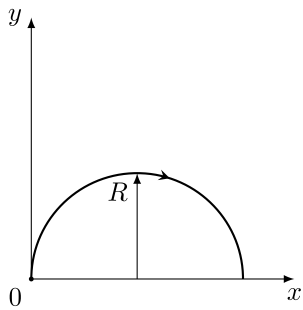
$$E_n = -E \cdot \frac{v_x}{v} = -\frac{\alpha y}{3}\sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

Подставляя во второй закон Ньютона, находим:

$$\frac{2qEy}{R} = \alpha qy\sqrt{\frac{2qE}{m}} - \frac{\alpha qy}{3}\sqrt{\frac{2qE}{m}} = \frac{2\alpha qy}{3}\sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$R = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{mE}{2q}} = const$$



При решении второго пункта было получено, что $R = const$. Это означает, что частица двигалась по полуокружности до тех пор, пока не остановилась.

Обратим внимание, что после остановки движение частицы повторяется — она вновь будет двигаться по окружности того же радиуса, но уже из нового положения, находящегося от начального на расстоянии, равном диаметру окружности $2R$. Также обратим внимание, что за половину периода частица проходит половину окружности, поскольку $v \sim \sqrt{\sin\varphi}$, где φ — угловой размер пройденной дуги.

Тогда через время $\tau = 3T/2$ координаты частицы равны $(x,y) = (3R,R)$, и модуль её перемещения составляет:

$$S(\tau) = \sqrt{10}R$$

или же:

$$S(\tau) = \frac{3}{\alpha}\sqrt{\frac{5mE}{q}}$$