# 9 класс

## Второй день

9.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$ Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть $d$ — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение $d$.

9.8. Дан остроугольный треугольник $ABC$, в котором $AB < BC$. Пусть $M$ и $N$ — середины сторон $AB$ и $AC$ соответственно, а $H$ — основание высоты, опущенной из вершины $B$. Вписанная окружность касается стороны $AC$ в точке $K$. Прямая, проходящая через $K$ и параллельная $MH$, пересекает отрезок $MN$ в точке $P$. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность.

9.9. Найдите наибольшее число $m$ такое, что для любых положительных чисел $a$, $b$ и $c$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно $k$ лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.

# 9 класс

## Второй день

9.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть $d$ — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение $d$.

9.8. Дан остроугольный треугольник $ABC$, в котором $AB < BC$. Пусть $M$ и $N$ — середины сторон $AB$ и $AC$ соответственно, а $H$ — основание высоты, опущенной из вершины $B$. Вписанная окружность касается стороны $AC$ в точке $K$. Прямая, проходящая через $K$ и параллельная $MH$, пересекает отрезок $MN$ в точке $P$. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность.

9.9. Найдите наибольшее число $m$ такое, что для любых положительных чисел $a$, $b$ и $c$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно $k$ лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.

# 10 класс

## Второй день

10.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_9$ и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

10.8. Биссектриса угла $A$ параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. На стороне $AB$ выбрана точка $L$ так, что $AL = CK$. Отрезки $AK$ и $CL$ пересекаются в точке $M$. На продолжении отрезка $AD$ за точку $D$ отмечена точка $N$. Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$.

10.9. Дано натуральное число $k$. Вдоль дороги стоят $n$ столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в $k$ цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем $n$ так могло оказаться?

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел $x$, $y$, $z$ выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$

# 10 класс

## Второй день

10.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_9$ и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

10.8. Биссектриса угла $A$ параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. На стороне $AB$ выбрана точка $L$ так, что $AL = CK$. Отрезки $AK$ и $CL$ пересекаются в точке $M$. На продолжении отрезка $AD$ за точку $D$ отмечена точка $N$. Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$.

10.9. Дано натуральное число $k$. Вдоль дороги стоят $n$ столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в $k$ цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем $n$ так могло оказаться?

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел $x$, $y$, $z$ выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$

# 11 класс

## Второй день

11.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

11.8. Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$. На биссектрисе угла $ABC$ внутри треугольника $ABC$ отмечена точка $D$, а на отрезке $BD$ — точка $E$ так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки $P$ и $Q$ — центры окружностей, описанных около треугольников $AOE$ и $COD$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $C$, $P$ и $Q$ лежат на одной прямой или на одной окружности.

11.9. Даны ненулевые числа $a$, $b$, $c$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |bc + 1| > 1.$$

11.10. В стране $2n$ городов ($n$ — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на $k$ межобластных и $m$ внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$.

# 11 класс

## Второй день

11.6. Для натурального числа $n$ обозначим через $S_n$ наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число $m$, что $S_{m+1} = 4S_m$?

11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

11.8. Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$. На биссектрисе угла $ABC$ внутри треугольника $ABC$ отмечена точка $D$, а на отрезке $BD$ — точка $E$ так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки $P$ и $Q$ — центры окружностей, описанных около треугольников $AOE$ и $COD$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $C$, $P$ и $Q$ лежат на одной прямой или на одной окружности.

11.9. Даны ненулевые числа $a$, $b$, $c$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |bc + 1| > 1.$$

11.10. В стране $2n$ городов ($n$ — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на $k$ межобластных и $m$ внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$.